Probe klausur 07/08

zu Aufgabe 5

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n_0 > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$ ist. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann $n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$, also $\frac{1}{n} < \varepsilon^2$, und somit $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, denn die Wurzelfunktion ist streng monoton wachsend. Für alle $n \geq n_0$ erhalten wir somit die Abschätzung

$$|\sqrt{n} - \sqrt{n-1}| = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Es folgt, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

zu Aufgabe 6

1. Wir beweisen die Konvergenz mit dem Wurzelkriterium. Sei $a_n = (\frac{3}{4} + \frac{1}{n})^n$. Für alle $n > 8$ gilt
$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{4} + \frac{1}{n} < \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} < 1.$$
Für fast alle a_n gilt somit $\sqrt[n]{a_n} < \frac{7}{8} < 1$. Mit dem Wurzelkriterium folgt die Konvergenz der Reihe.

2. Wir beweisen die Konvergenz mit dem Leibniz-Kriterium. Sei $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$. Dann gilt
$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1} > \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} = b_{n+1},$$
denn $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$. Somit ist (b_n) streng monoton fallend. Weiter gilt für alle $n \geq 1$
$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
Da $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ eine Nullfolge ist (Beweis wie in Aufgabe 5), ist (b_n) eine Nullfolge. Mit dem Leibniz-Kriterium folgt die Konvergenz der Reihe.

3. Wir beweisen die Behauptung mit dem Quotientenkriterium. Sei $a_n = \frac{n^2}{3^n}$. Dann gilt
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{1}{3}(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}).$$
Es ist $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}) = 1$, also $\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \frac{1}{3} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergent ist.

WS 07/08

zu Aufgabe 5

Es gilt $(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n) = n^2+n-n^2 = n$. Es folgt

$$\sqrt{n^2+n}-n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{n}$. Da die konstante Folge (1) und die Folge $(1+\frac{1}{n})$ konvergent sind und den Grenzwert 1 haben, konvergiert $(\sqrt{1+\frac{1}{n}})$ ebenfalls gegen 1. Somit ist die Folge $(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1})$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

zu Aufgabe 6

Wir verwenden zum Beweis das Quotientenkriterium. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\\ &= \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2}.\end{aligned}$$

Es ist $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{4n+1}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n}}) = \frac{1}{4} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergent ist.

Nachklausur 07/08

zu Aufgabe 6

1. **Behauptung:** Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{10^n} x^n$ ist für alle x mit $|x| < 10$ konvergent.

   Beweis: Es gilt
   $$\sqrt[n]{\left|\frac{n}{10^n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{n}{10^n}} = \frac{1}{10}\sqrt[n]{n}.$$
   Es ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, und es folgt
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{10^n}\right|} = \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{10} = \limsup \sqrt[n]{\left|\frac{n}{10^n}\right|}.$$
   Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe 10 ist. Somit konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 10$.

2. **Behauptung:** Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{(n+1)!}$ ist konvergent.

   Beweis: Wir verwenden zum Beweis das Quotientenkriterium. Es gilt
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)3^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n3^n} = \frac{n+1}{n(n+2)} \cdot 3.$$
   Es ist $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$. Somit gibt es ein $q < 1$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ für fast alle n, und mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergent ist.

WS 08/09

Aufgabe 4

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, also gilt insbesondere $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(-\frac{1}{n})$ und $(\frac{1}{n})$ gegen 0 konvergieren, konvergiert $(\frac{\sin(n)}{n})$, und $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

Aufgabe 7

Sei $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = a$. Da alle Folgenglieder positiv sind, ist $a \geq 0$. Wähle $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a_n}{b_n} < c$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt $a_n < cb_n$ für alle $n \geq n_0$. Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent ist, ist auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} cb_n$ konvergent. Damit ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} cb_n$ eine Majorante für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, und es folgt, dass auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent ist.

SS 09

Aufgabe 7

Die Reihe ist sogar absolut konvergent, denn für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\frac{(n+1)^2(-2)^{-n-1}}{n^2(-2)^{-n}}\right| = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^2 = \frac{1}{2} < 1$, folgt aus dem Quotientenkriterium, dass die Reihe konvergent ist.

Aufgabe 9

1. Wir zeigen, dass die Folge monoton fallend und beschränkt ist.

   - **Monotonie:** Wir zeigen mit Induktion, dass $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann gilt $a_2 = \sqrt{88+12} = 10 < 88 = a_1$. Der Induktionsanfang ist somit richtig. Die Induktionsannahme ist, dass $a_{n+1} < a_n$ für ein $n \geq 1$ gilt. Dann gilt $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}+12} < \sqrt{a_n+12} = a_{n+1}$, denn die Wurzelfunktion ist streng monoton wachsend.

   - **Beschränkt:** Von oben ist (a_n) durch $a_1 = 88$ beschränkt, denn die Folge ist monoton fallend. Wir zeigen mit Induktion, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $a_1 = 88 > 0$, es gilt also der Induktionsanfang. Die Induktionsannahme ist, dass $a_n > 0$ für ein $n \geq 1$ ist. Dann gilt $a_{n+1} = \sqrt{a_n+12} > \sqrt{12} > 0$. Es folgt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Mit dem Monotonieprinzip folgt, dass (a_n) konvergent ist.

2. Im ersten Teil der Aufgabe haben wir gezeigt, dass (a_n) konvergent ist. Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, und es folgt

   $$a^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n+12}^2 = \lim_{n\to\infty}(a_n+12) = a+12,$$

   also $a^2 - a - 12 = 0$. Es folgt $a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+48}$, also $a = 4$ oder $a = -3$. Da der Grenzwert nicht negativ sein kann, denn alle Folgenglieder sind positiv, folgt, dass $a = 4$ ist.

Aufgabe 6

1. Wir verwenden zur Berechnung den Satz von Cauchy-Hadamard. Dazu zeigen wir zunächst, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ existiert. Es ist $\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}}$. Die Folge $(\sqrt[n]{n})$ konvergiert laut Studienbrief gegen 1, und da die Wurzelfunktion stetig ist, konvergiert $(\sqrt{\sqrt[n]{n}})$ gegen $\sqrt{1} = 1$. Es folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$ ist. Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe 1, also das Konvergenzintervall $(-1, 1)$ ist.

2. Für $x = 1$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Für alle $n \geq 1$ ist $\sqrt{n} \leq n$, also $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$. Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist, folgt, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent ist, denn die Folgen beider Partialsummen sind unbeschränkt. Somit folgt, dass die Potenzreihe für $x = 1$ divergent ist.

   Für $x = -1$ gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Da $(\sqrt{n})$ monoton wachsend und unbeschränkt ist, ist $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ eine monoton fallende Nullfolge. Es folgt mit dem Leibniz-Kriterium, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergent ist. Somit ist die Potenzreihe für $x = -1$ konvergent.

Aufgabe 8

1. Da $a_n > \sqrt{x_0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, ist $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist die Folge (a_n) nach unten beschränkt. Es gilt $1 + a_n > 0$ sowie $a_n^2 > x_0$, also $-a_n^2 < -x_0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist damit

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \tfrac{x_0+a_n}{1+a_n} - a_n = \tfrac{x_0+a_n}{(1+a_n)} - \tfrac{(1+a_n)a_n}{(1+a_n)} \\ &= \tfrac{x_0+a_n-a_n-a_n^2}{1+a_n} = \tfrac{x_0-a_n^2}{1+a_n} < \tfrac{x_0-x_0}{1+a_n} = 0. \end{aligned}$$

   Es folgt $a_{n+1} < a_n$. Damit ist die Folge streng monoton fallend, also auch nach oben beschränkt. Mit dem Monotonieprinzip ist die Folge konvergent.

2. Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Da $a_n > \sqrt{x_0} > 0$ ist, folgt $a \geq \sqrt{x_0} > 0$. Mit der unter 1. gezeigten Konvergenz folgt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_0 + \lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{x_0 + a}{1 + a},$$

   also $a = \frac{x_0+a}{1+a}$, somit $a + a^2 = x_0 + a$, und damit $a^2 = x_0$. Es folgt $a = \sqrt{x_0}$, denn $a > 0$.

SS 10

Aufgabe 7

Wir zeigen, dass die Reihe divergent ist. Sei $a_n = \sqrt[n]{3}$. Es ist $a_n = 3^{\frac{1}{n}}$. Die Folge $(\frac{1}{n})$ ist eine Nullfolge. Da die allgemeine Potenzfunktion stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 3^0 = 1,$$

und damit ist (a_n) keine Nullfolge. Es folgt, dass die Reihe divergent ist.

Aufgabe 9

1. Wir zeigen, dass (a_n) monoton fallend und beschränkt ist. Mit dem Monotonieprinzip folgt dann die Konvergenz von (a_n).

   Wir beweisen mit Induktion nach n, dass $a_n \geq 2$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $a_1 = 3$ ist, gilt der Induktionsanfang. Sei $a_n \geq 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

   $$a_{n+1} - 2 = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} - 2 = \frac{a_n^2 - 4a_n + 4}{2a_n} = \frac{(a_n - 2)^2}{2a_n} \geq 0,$$

   denn es sind $(a_n - 2)^2 \geq 0$ und $a_n \geq 2 > 0$ nach Induktionsvoraussetzung. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt $a_n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Wir zeigen nun, dass (a_n) monoton fallend ist. Da $a_n \geq 2$ ist, folgt $\frac{2}{a_n} \leq 1$, also $\frac{a_n}{2} \geq 1 \geq \frac{2}{a_n}$, und damit

   $$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} \leq \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} = a_n.$$

   Damit ist (a_n) nach oben durch 3 und nach unten durch 2 beschränkt und monoton fallend. Es folgt, dass (a_n) gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergent ist.

2. Da alle Folgenglieder ≥ 2 sind, ist $a \geq 2$.

   Da (a_n) gegen $a \neq 0$ konvergiert, konvergieren auch $(\frac{a_n}{2})$ und $(\frac{2}{a_n})$, und zwar gegen $\frac{a}{2}$ beziehungsweise gegen $\frac{2}{a}$. Es folgt

   $$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{a_n} = \frac{a}{2} + \frac{2}{a} = \frac{a^4 + 4}{2a}.$$

   Es folgt $2a^2 = a^2 + 4$, also $a^2 = 4$ und damit $a = 2$, denn $a \geq 2$.

Aufgabe 7

Wir betrachten zunächst die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ ist im Wesentlichen eine geometrische Reihe; nur, dass hier die Summation bei 1 und nicht bei 0 beginnt. Es ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}) - (\frac{1}{3})^0 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Jetzt untersuchen wir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

und mit dieser Gleichung lässt sich die n-te Partialsumme s_n dieser Reihe leicht berechnen. Es gilt nämlich

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

denn der negative Term in der Klammer hebt sich durch den positiven Term in der folgenden Klammer weg, und es überleben nur der erste und der letzte Term. Die Folge $(s_n) = (1 - \frac{1}{n+1})$ ist konvergent, und es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} (s_n) = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1 - 0 = 1.$$

Somit gilt

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n(n+1)}).$$

Aufgabe 8

Wir zeigen, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{17^n}$ konvergiert und verwenden zum Beweis das Quotientenkriterium. Dazu müssen wir den $(n+1)$-ten Summanden $a_{n+1} = \frac{n+1}{17^{n+1}}$ durch den n-ten Summanden $a_n = \frac{n}{17^n}$ teilen. Wir erhalten

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n+1}{17^{n+1}}}{\frac{n}{17^n}}\right| = \frac{n+1}{17^{n+1}} \cdot \frac{17^n}{n} = \frac{n+1}{17n}.$$

Die Folge $(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|) = (\frac{n+1}{17n})$ ist konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{17n}) = \lim_{n\to\infty} (\frac{1+\frac{1}{n}}{17}) = \frac{1}{17} < 1.$$

Da der Grenzwert kleiner als 1 ist, folgt, dass die Reihe konvergiert.

SS 11

Aufgabe 5

Wir zeigen, dass die Folge monoton fallend und beschränkt ist. Damit ist bewiesen, dass

sie konvergent ist. Für die Monotonie berechnen wir $a_{n+1} - a_n$. Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=n+1}^{2n+2} \tfrac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \tfrac{1}{kl} \\ &= \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{2n+1} + \tfrac{1}{2n+2} \right) - \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{n} \right) \\ &= \tfrac{1}{2n+1} + \tfrac{1}{2n+2} - \tfrac{1}{n} \\ &= \left(\tfrac{1}{2n+1} - \tfrac{1}{2n} \right) + \left(\tfrac{1}{2n+2} - \tfrac{1}{2n} \right) < 0. \end{aligned}$$

Somit ist (a_n) monoton fallend. Nach oben ist (a_n) durch a_1 beschränkt, und da alle Folgenglieder positiv ist, ist (a_n) durch 0 nach unten beschränkt. Es folgt die Konvergenz der Folge.

Aufgabe 7

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $a_n = \frac{n}{n+1} x^n$. Es gilt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|\frac{n+1}{n+2} x^{n+1}|}{|\frac{n}{n+1} x^n|} = |x| \frac{n+1}{n+2} \frac{n+1}{n} = |x| \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}.$$

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} |x| \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = |x|$. Für $|x| < 1$ konvergiert damit die Reihe, und für $|x| > 1$ divergiert sie. Die Folgen $(\frac{n}{n+1})$ und $((-1)^n \cdot \frac{n}{n+1})$ sind keine Nullfolgen, und es folgt, dass die Reihen für $x = 1$ und $x = -1$ divergieren.

SS 12

Aufgabe 6

Aufgabe 7

1. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+(-1)^n}{n^2}$ ist zwar alternierend, aber die Folge $(b_n) = (\frac{n+(-1)^n}{n^2})$ ist nicht monoton fallend, wie wir jetzt zeigen werden.

   Dazu reicht es, die ersten Folgeglieder von (b_n) auszurechnen: Es sind $b_1 = \frac{1+(-1)}{1} = 0$, $b_2 = \frac{2+(-1)^2}{4} = \frac{3}{4}$, $b_3 = \frac{3+(-1)^3}{9} = \frac{2}{9}$ und $b_4 = \frac{4+(-1)^4}{16} = \frac{5}{16}$. Es sind $b_1 < b_2$ (schon dies zeigt, dass (b_n) nicht monoton fallend ist), $b_2 > b_3$ und $b_3 < b_4$. Die Folge (b_n) ist daher nicht monoton fallend.

   Man kann sogar zeigen (musste man hier aber nicht), dass es unendlich viele Stellen der Folge gibt, an denen sie nicht monoton fällt. Dazu sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade.

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n &= \tfrac{n+1+(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} - \tfrac{n+(-1)^n}{n^2} \\
&= \tfrac{n+2}{(n+1)^2} - \tfrac{n-1}{n^2} \\
&= \tfrac{n^2(n+2)-(n+1)^2(n-1)}{n^2(n+1)^2} \\
&= \tfrac{n^3-2n^2-n^3-2n^2-n+n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2} \\
&= \tfrac{n^2+n+1}{n^2(n+1)^2} > 0.
\end{aligned}$$

   Ist n also ungerade, dann ist $b_{n+1} > b_n$. Somit ist die Folge (b_n) nicht monoton fallend.

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(-1)^n\frac{n+(-1)^n}{n^2} = (-1)^n\frac{1}{n} + \frac{(-1)^{2n}}{n^2} = (-1)^n\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

   Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ ist als Negative der alternierenden geometrischen Reihe konvergent, und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ist ebenfalls konvergent. Daher konvergiert die Summe dieser Reihen, also die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+(-1)^n}{n^2}$.

SS 13

Aufgabe 7

Die vorgegebene Reihe ist eine Potenzreihe mit $a_n = \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir können den Konvergenzradius mit dem Konvergenzkriterium von Cauchy-Hadamard berechnen. Dazu betrachten wir

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}}.$$

Da die Wurzelfunktion stetig ist, dürfen wir den Grenzwert unter die Wurzel ziehen. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = \sqrt{1} = 1.$$

Damit ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\frac{1}{1} = 1$, und die Potenzreihe konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Man hätte mit etwas mehr Aufwand auch die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}x^n$ einmal für $|x| < 1$ und einmal für $|x| > 1$ mit dem Quotienten- oder Wurzelkriterium abschätzen können.

Für $x = 1$ müssen wir die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}$ betrachten. Da $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist (sie ist monoton wachsend und unbeschränkt), kann diese Reihe nicht konvergieren. Da auch $((-1)^n\sqrt{n})$ keine Nullfolge ist, divergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}(-1)^n$.

WS 13/14

Aufgabe 5

$x\sin(x)$ und $\ln(1+x^2)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar und nehmen in $x=0$ jeweils den Wert 0 an. Nach de l'Hospital gilt dann

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{\ln(1+x^2)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+x\cos(x)}{2x\cdot\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{2}\cdot\frac{\sin(x)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{2}\cos(x)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}+\frac{1}{2}\cos(0)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}+\frac{1}{2}\ ,\end{aligned}$$

<u>wenn</u> $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ (und damit die ganze rechte Seite) existiert. Dafür kann aber wieder de l'Hospital angewendet werden:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=\frac{1}{1}=1\ ,$$

also tatsächlich

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{\ln(1+x^2)}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}=1\ .$$

Aufgabe 6

Die Potenzreihe hat die Koeffizienten $a_n=\frac{e^{n+2}}{n}$, also gilt $\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{\sqrt[n]{e^n}\cdot\sqrt[n]{e^2}}{\sqrt[n]{n}}=e\cdot\frac{\sqrt[n]{e^2}}{\sqrt[n]{n}}$, also ($\lim\sqrt[n]{n}=1$ und $\lim\sqrt[n]{c}=1$ für jedes $c>0$ kennen wir) $\lim\sqrt[n]{|a_n|}=e$; also gilt nach dem Konvergenzkriterium von Cauchy-Hadamard $R=\frac{1}{e}$. Die Potenzreihe konvergiert also für $x\in(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$ und divergiert für $|x|>\frac{1}{e}$.

Die Ränder des Konvergenzintervalls sind gesondert zu untersuchen: Für $x=\frac{1}{e}$ erhalten wir die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n+2}}{ne^n}=e^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, also (bis auf einen Faktor) die divergente harmonische Reihe, für $x=-\frac{1}{e}$ die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n+2}}{n}(-1)^n\frac{1}{e^n}=e^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, also (bis auf einen Faktor) die nach dem Leibnizkriterium konvergente alternierende harmonische Reihe. Insgesamt konvergiert die Potenzreihe also genau für $x\in[-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

Wegen $2<e$ gilt $\frac{1}{2}>\frac{1}{e}$, also $-\frac{1}{2}<-\frac{1}{e}$, also divergiert die Reihe für $x=-\frac{1}{2}$; wegen $3>e$ gilt $0<\frac{1}{3}<\frac{1}{e}$, also konvergiert die Reihe für $x=\frac{1}{3}$.

SS 14

Aufgabe 6

Zum Beweis der Konvergenz zerlegen wir die Reihe in zwei Teile. Es ist $(-1)^k \frac{k+(-1)^k}{k^2} = (-1)^k \frac{k}{k^2} + (-1)^k \frac{(-1)^k}{k^2} = (-1)^k \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$, also $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k+(-1)^k}{k^2} = \sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Die Reihen $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ und $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergieren, also auch ihre Summe.

Um das Leibnitzkriterium anwenden zu dürfen, muss die Folge der $a_k = (-1)^k \frac{k+(-1)^k}{k^2}$ monoton fallend sein. Wir zeigen, das dies hier nicht der Fall ist. Es gilt

$$
\begin{aligned}
a_k - a_{k+1} &= \frac{k+(-1)^k}{k^2} - \frac{(k+1)+(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} \\
&= \frac{k(k+1)^2+(-1)^k(k+1)^2-k^2(k+1)-(-1)^{k+1}k^2}{k^2(k+1)^2} \\
&= \frac{(k^2+k)+(-1)^k(2k^2+2k+1)}{k^2(k+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Der Ausdruck unter dem Bruchstrich ist immer > 0, der auf dem Bruchstrich ist für gerade k größer als 0 und für ungerade kleiner als 0. Somit ist die Folge (a_k) nicht monoton fallend, und die Vorraussetzung für das Leibnitzkriterium ist nicht erfüllt.

WS 14/15

Aufgabe 5

a) In Aufgabe 1 ist bereits gezeigt worden, dass die Folge (a_n) nach unten zumindest durch 4 beschränkt ist; wenn wir noch zeigen können, dass sie monoton fallend ist, ist sie automatisch auch nach oben beschränkt und nach dem Monotonieprinzip konvergent (mit Grenzwert ≥ 4). Bei einer rekursiv definierten Folge geht das nur mit (erneuter) vollständiger Induktion.

Wir wollen also zeigen, dass $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Im Induktionsanfang sei $n_0 = 1$. Dann ist $a_1 = 10$, $a_2 = 2 + \sqrt{2 \cdot 10 - 1} = 2 + \sqrt{19} \leq 2 + \sqrt{25} = 7$, also $a_2 \leq a_1$.

Es gilt also der Induktionsanfang. Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $a_{n+1} \leq a_n$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir schließen, dass $a_{n+2} \leq a_{n+1}$ folgt. Es gilt aber (wegen der Monotonie der Wurzelfunktion) tatsächlich

$$a_{n+2} = 2 + \sqrt{2a_{n+1} - 1} \leq 2 + \sqrt{2a_n - 1} = a_{n+1} \ .$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Also ist die Folge (a_n) monoton fallend und nach unten durch 4 beschränkt, konvergiert daher nach dem Monotonieprinzip gegen a mit $a \geq 4$. Aus der Rekursion für a_n und der Stetigkeit der Wurzelfunktion folgt aber

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (2 + \sqrt{2a_n - 1}) = 2 + \sqrt{2 \cdot (\lim_{n\to\infty} a_n) - 1} = 2 + \sqrt{2a - 1} \\ \Rightarrow \quad & (a-2)^2 = 2a - 1 \ \Leftrightarrow \ a^2 - 6a + 5 = (a-5)(a-1) = 0 \ , \end{aligned}$$

also (wegen $a \geq 4$) $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.

b) Zu untersuchen ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ mit $b_n = \left(\frac{3}{a_n}\right)^n$; dafür gilt ($a_n \geq 4$ dürfen wir verwenden)

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{3}{a_n} \leq \frac{3}{4} =: q < 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \ .$$

Also konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

SS 15

Aufgabe 6

1. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$ divergiert, wie wir mit dem Quotientenkriterium zeigen werden. Sei $a_n = \frac{n^n}{2^n n!}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{2^n n!}{n^n} \\ &= \frac{(n+1)(n+1)^n 2^n n!}{2 \cdot 2^n (n+1) n! n^n} = \frac{(n+1)^n}{2n^n} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

   Die Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ konvergiert somit gegen $\frac{e}{2}$. Somit sind fast alle $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, und das Quotientenkriterium zeigt, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$ divergent ist.

2. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\frac{(-1)^n}{n})^{n^2}$ divergiert ebenfalls. Zum Beweis verwenden wir das Wurzelkriterium.Sei $a_n = (1+\frac{(-1)^n}{n})^{n^2}$. Für gerade Indizes ist $\sqrt[n]{|a_n|} = (1+\frac{1}{n})^n$. Die Teilfolge $(\sqrt[2n]{|a_{2n}|})$ konvergiert somit gegen $e > 1$. Damit sind unendlich viele Glieder der Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ größer als 1. Mit dem Wurzelkriterium folgt die Divergenz der Reihe.

WS 15/16

Aufgabe 4

a) Für $a_n = \frac{\sin(n)\cdot\cos(n)}{n}$ gilt $|\sin(n)| \leq 1, |\cos(n)| \leq 1$, also $|a_n| \leq \frac{1}{n}$. Damit ist a_n eine Nullfolge.

b) $\sin(x)$ und x sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar und nehmen in $x = 0$ jeweils den Wert 0 an; $\cos(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig (und differenzierbar) und nimmt in $x = 0$ den Wert 1 an. Nach de l'Hospital gilt dann

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 \ ,$$

da der rechte Grenzwert existiert; damit gilt auch

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot\cos(x)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos(x) = 1\cdot 1 = 1 \ .$$

Aufgabe 6

Für $a_n = \frac{n!n^n}{(2n)!}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!(n+1)^{n+1}(2n)!}{(2(n+1))!n!n^n} = \frac{(n+1)n!(n+1)(n+1)^n(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!n!n^n} \\ &= \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &\to \frac{1}{4}\cdot e < 1 \text{ für } n\to\infty \ , \end{aligned}$$

also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

SS 16

Aufgabe 5

Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn a_n ist ein Produkt, bei dem jeder Faktor größer als 0 ist. Außerdem ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} b_i = \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right) b_{n+1} = a_n b_{n+1} < a_n,$$

denn $a_n, b_{n+1} > 0$ und $b_{n+1} < 1$. Also ist die Folge monoton fallend. Damit ist sie auch nach oben beschränkt, zum Beispiel durch $a_1 = b_1$. Da die Folge monoton und beschränkt ist, ist sie konvergent.

Aufgabe 7

(a) Es gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^7 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^7}{n^7} = 2^7 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}$. Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}$ laut Studienbrief konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^7$.

(b) Die Reihe konvergiert nicht, denn $(\sqrt{3+n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge.

(c) Wir benutzen das Quotientenkriterium. Es ist

$$\frac{\frac{n!}{3(n+1)^{n+1}}}{\frac{(n-1)!}{3n^n}} = \frac{n!n^n}{(n-1)!(n+1)^{n+1}} = \frac{n \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^{n+1}$$
$$= (\frac{1}{1+\frac{1}{n}})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^{-(n+1)}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{-(n+1)} = e^{-1} < 1$ konvergiert die Reihe.

WS 16/17

Aufgabe 6

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^3 \geq 1$, somit auch $n^3+1 \leq 2n^3$ und damit $a_n = \frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$. Da die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, divergiert nach dem Minorantenkriterium auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$.

b) Wegen $\frac{n^2}{n^4+1} < \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$ und der bekannten Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch unsere Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}$.

c) Hier können wir uns das Leben (bzw. eine saubere Lösung) leichter machen, indem wir Quotienten- und Majorantenkriterium hintereinanderschalten: Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ mit $d_n = \frac{n^2}{3^n}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium, denn es gilt $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(n+1)^2 \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot n^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} \to \frac{1}{3} < 1$ für $n \to \infty$; also konvergiert wegen $\frac{n^2}{3^n+1} < \frac{n^2}{3^n}$ und dem Majorantenkriterium auch unsere Reihe c).

SS 17

Aufgabe 6

Sei $m \in \mathbb{N}$. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - 0| = |a_n| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Wir wählen nun ganz speziell $\epsilon = |a_m| > 0$. Dann gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < |a_m|$ für alle $n \geq n_0$. Da aber $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist $|a_n| = -a_n$ und $|a_m| = -a_m$. Es gilt also $-a_n < -a_m$ für alle $n \geq n_0$ und damit $a_n > a_m$ für alle $n \geq n_0$.

Aufgabe 7

(a) Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-7)^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-7)^n}{5^n} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{7}{5})^n.$$

Dies ist bis auf den Faktor $\frac{1}{5}$ eine geometrische Reihe der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, wobei $|q| > 1$ gilt. Die Reihe ist damit divergent.

(b) Für die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ benutzen wir das Wurzelkriterium. Es ist

$$\sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{2^n}} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[n]{n}}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}} = 1$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2} < 1$. Es folgt, dass die Reihe konvergiert.

SS 18

Aufgabe 7

Wir versuchen, das Konvergenzkriterium von Cauchy-Hadamard anzuwenden und betrachten die Folge $(\sqrt[n]{\left|\frac{2n+1}{n}\right|})_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2n+1}{n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{2n+1}{n}} = \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da

$$\sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim \sqrt[n]{2} = \lim \sqrt[n]{3} = 1$ gilt, folgt mit dem Einschnürungssatz auch $\lim \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}} = 1$. Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard gilt also, dass die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergiert und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergiert. Es bleiben noch $x = 1$ und $x = -1$ zu betrachten. Da jedoch $\lim \frac{2n+1}{n} = \lim 2 + \frac{1}{n} = 2 \neq 0$ gilt, konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n}$ nicht. Es ist auch $((-1)^n \frac{2n+1}{n}) = ((-1)^n(2+\frac{1}{n})$ keine Nullfolge, denn die Folgenglieder sind für gerades n größer als 2 und für ungerades n kleiner als -2. Auch für $x = -1$ divergiert die Potenzreihe also.

WS 18/19

Aufgabe 6

Für $a_n = \frac{n!n^n}{(2n)!}$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(n+1)!(n+1)^{n+1}(2n)!}{(2(n+1))!n!n^n} = \frac{(n+1)n!(n+1)(n+1)^n(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!n!n^n} \\
&= \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)}{2 \cdot \left(2+\frac{1}{n}\right)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&\to \frac{1}{4} \cdot e < 1 \text{ für } n \to \infty \ ,
\end{aligned}$$

also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

SS 19

Aufgabe 7

Mit dem Leibniz-Kriterium kann man zeigen, dass die Reihe konvergiert. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{n+1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend, denn

$$\frac{\frac{(n+1)+1}{(n+1)^2}}{\frac{n+1}{n^2}} = \frac{(n+2)n^2}{(n+1)^3} = \frac{n^3+2n^2}{n^3+3n^2+3n+1} < 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also $a_{n+1} < a_n$. Außerdem konvergiert die Folge gegen 0, denn $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = 0$. Mit dem Leibniz-Kriterium (bzw. der im Kurstext darauf folgenden Aufgabe) folgt nun, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$ konvergiert.

Die Reihe konvergiert aber nicht absolut, denn $\frac{n+1}{n^2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die harmonische Reihe eine divergente Minorante für

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n(n+1)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}.$$